IES condestAble álvaro de luna .es
condestable@iescondestable.es

MATEMÁTICAS APLICADAS A CC.SS. I
TEMA 3: POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

HOJA Nº 4 Fecha de entrega: Miércoles, 1 de diciembre de 2010

Ejercicios.

1. Dados los polinomios $P(x) = x^5 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + 2$, $Q(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x - 1$ y $R(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^5 + x^2 - \frac{1}{3}$, calcula y deja expresada la solución lo más simplificada posible:

   a) P(x) + Q(x) – R(x) b) P(x)·Q(x) + 3·R(x)

2. Realiza las siguientes operaciones:

   $a)\quad 3\cdot(2x-3)^2 - 2\cdot(3x+2)^2 - 4\cdot(x-3)(x+2) =$ $b)\quad \left(\frac{x}{3}-3\right)^2 - \left(\frac{x}{3}-3\right)\left(\frac{x}{3}+3\right) + \left(\frac{x}{3}+3\right)^2 =$

3. Divide por el método general los siguientes polinomios:

   $a)\quad (x + 3x^5 - 2x^3 - 2x^4 - 1) : (2 + x - x^3) =$ $b)\quad (4x^4 + 8x^2 - 7x^3 - 4x + 3) : (2 - 3x + 2x^2) =$

4. Realiza las siguientes divisiones, indicando el cociente y el resto, por la Regla de Ruffini:

   $a)\quad (2x - x^4 + 2x^3 - 3) : (x + 2) =$ $b)\quad (1 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2) : \left(x - \frac{1}{2}\right) =$

5. Calcula el valor del parámetro k en el polinomio p(x)=12 + x^3 - kx para que al dividirlo por (x – 2) de resto – 4.

6. Factoriza los siguientes polinomios sin utilizar la regla de Ruffini:

   $a)\quad x^6 - 25x^4$ $b)\quad x^4 - 6x^3 + 9x^2$ $c)\quad 9x^6 + 25x^2 + 30x^4$ $d)\quad x^5 - x$

7. Descomponer factorialmente los siguientes polinomios:

   $a)\quad f(x) = 6 - 12x^2 + 7x - 3x^3 + 2x^4$ $b)\quad h(x) = 3 + 4x + 16x^3 - 28x^2$

8. Calcula el M.c.d y m.c.m. de los polinomios P(x) = $x^3 - 3x^2 + 4$, Q(x) = $x^3 - 2x^2 - x + 2$ y R(x) = $x^4 - 3x^3 + 2x^2$.

9. Simplifica al máximo: $a)\quad \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2}{6x^4 + 4x^3 + 2x^5} =$ $b)\quad \frac{2x^3 + 2x}{x + x^3 - 1 - x^2} =$

10. Opera y simplifica al máximo:

    $a)\quad \frac{2z+7}{z^3-1} + \frac{z}{z^2+z+1} - \frac{3}{z-1} =$ $b)\quad \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{1-2x+x^2} =$

    $c)\quad \frac{x^2-4}{x^2-3x}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6} =$ $d)\quad \frac{x^2}{4x^2-9} : \frac{x}{4x^2+9-12x} =$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS.

1. Dados los polinomios $P(x) = x^5 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + 2$**,** $Q(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x - 1$ **y** $R(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^5 + x^2 - \frac{1}{3}$**, calcula y deja expresada la solución lo más simplificada posible:**

$a)$ **P(x) + Q(x) – R(x)** **b) P(x)·Q(x) + 3·R(x)**

Solución.

$$a)\quad P(x)+Q(x)-R(x) = x^5 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + 2 + x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x - 1 - \left(x^4 - \frac{5}{2}x^5 + x^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= x^5 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + 2 + x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x - 1 - x^4 + \frac{5}{2}x^5 - x^2 + \frac{1}{3} = \left(1+\frac{5}{2}\right)x^5 + \left(-\frac{1}{3}-1\right)x^4 + x^3 + \left(\frac{1}{4}-1\right)x^2 +$$

$$+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)x + \left(2-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{2}x^5 - \frac{4}{3}x^4 + x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

$$b)\quad P(x)\cdot Q(x) + 3\cdot R(x) = \left(x^5 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + 2\right)\left(x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x - 1\right) + 3\cdot\left(x^4 - \frac{5}{2}x^5 + x^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= x^8 - \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{2}x^6 - x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^5 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^4 + x - 2 +$$

$$+3x^4 - \frac{15}{2}x^5 + 3x^2 - 1 = -\frac{1}{3}x^9 + x^8 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right)x^6 + \left(-1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{15}{2}\right)x^5 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 3\right)x^4 + \left(\frac{1}{8} + 2\right)x^3 +$$

$$+\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 3\right)x^2 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)x + (-2-1) = -\frac{1}{3}x^9 + x^8 + \frac{5}{12}x^6 - \frac{289}{36}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{17}{8}x^3 + \frac{29}{12}x^2 + \frac{5}{3}x - 3$$

2. Realiza las siguientes operaciones:

$a)\quad 3\cdot(2x-3)^2 - 2\cdot(3x+2)^2 - 4\cdot(x-3)(x+2) =$ $\qquad b)\quad \left(\frac{x}{3}-3\right)^2 - \left(\frac{x}{3}-3\right)\left(\frac{x}{3}+3\right) + \left(\frac{x}{3}+3\right)^2 =$

Solución.

$$a)\quad 3\cdot(2x-3)^2 - 2\cdot(3x+2)^2 - 4\cdot(x-3)(x+2) = 3\cdot\left((2x)^2 + 3^2 - 2\cdot 2x\cdot 3\right) - 2\cdot\left((3x)^2 + 2^2 + 2\cdot 3x\cdot 2\right) -$$

$$-4\cdot(x^2 + 2x - 3x - 6) = 3\cdot\left(4x^2 + 9 - 12x\right) - 2\cdot\left(9x^2 + 4 + 12x\right) - 4\cdot(x^2 - x - 6) = 12x^2 + 27 - 36x - 18x^2$$

$$-8 - 24x - 4x^2 + 4x + 24 = -10x^2 - 56x + 43$$

$b)\quad \left(\frac{x}{3}-3\right)^2-\left(\frac{x}{3}-3\right)\left(\frac{x}{3}+3\right)+\left(\frac{x}{3}+3\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2+3^2-2\cdot\frac{x}{3}\cdot 3-\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2-3^2\right)+\left(\frac{x}{3}\right)^2+3^2+2\cdot\frac{x}{3}\cdot 3=$

$$=\frac{x^2}{9}+9-2x-\frac{x^2}{9}+9+\frac{x^2}{9}+9+2x=\frac{x^2}{9}+27$$

3. Divide por el método general los siguientes polinomios:

$a)\quad (x+3x^5-2x^3-2x^4-1):(2+x-x^3)=$ $\qquad b)\quad (4x^4+8x^2-7x^3-4x+3):(2-3x+2x^2)=$

Solución:

$a)\quad (x+3x^5-2x^3-2x^4-1):(2+x-x^3)=$

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr}
+3x^5 & -2x^4 & -2x^3 & & +x & -1 & -x^3 & +x & +2 \\ \cline{7-9}
-3x^5 & & +3x^3 & +6x^2 & & & -3x^2 & +2x & -1 \\ \cline{1-6}
 & -2x^4 & +x^3 & +6x^2 & +x & -1 & & & \\
 & +2x^4 & & -2x^2 & -4x & & & & \\ \cline{2-6}
 & & +x^3 & +4x^2 & -3x & -1 & & & \\
 & & -x^3 & & +x & +2 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & +4x^2 & -2x & +1 & & &
\end{array}$$

Por lo tanto, el cociente es C(x) = – $3x^2$ + 2x – 1 y el resto es R(x) = $4x^2$ – 2x + 1.

$b)\quad (4x^4+8x^2-7x^3-4x+3):(2-3x+2x^2)=$

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
+4x^4 & -7x^3 & +8x^2 & -4x & +3 & 2x^2 & -3x & +2 \\ \cline{6-8}
-4x^4 & +6x^3 & -4x^2 & & & 2x^2 & -\frac{1}{2}x & +\frac{5}{4} \\ \cline{1-5}
 & -x^3 & +4x^2 & -4x & +3 & & & \\
 & +x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & +x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & +\frac{5}{2}x^2 & -3x & +3 & & & \\
 & & -\frac{5}{2}x^2 & +\frac{15}{4}x & -\frac{5}{2} & & & \\ \cline{3-5}
 & & & +\frac{3}{4}x & +\frac{1}{2} & & &
\end{array}$$

Por lo tanto, el cociente es C(x) = $2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ y el resto es R(x) = $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

4. Realiza las siguientes divisiones, indicando el cociente y el resto, por la Regla de Ruffini:

$$a)\quad (2x - x^4 + 2x^3 - 3):(x+2) = \qquad\qquad b)\quad (1 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2):\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

Solución

$a)\quad (2x - x^4 + 2x^3 - 3):(x+2) =$

Aplicando la regla de Ruffini

	-1	+2	+0	+2	-3
-2		+2	-8	+16	-36
	-1	+4	-8	+18	-39

De donde obtenemos que el cociente es C(x) = – x^3 + $4x^2$ – 8x + 18 y el resto es R(x) = – 39.

$b)\quad (1 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2):\left(x - \frac{1}{2}\right) =$

Aplicando la regla de Ruffini

	+3	-2	-7	+0	+1
+1/2		+3/2	-1/4	-29/8	-29/16
	+3	-1/2	-29/4	-29/8	-13/16

De donde obtenemos que el cociente es $C(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{29}{4}x - \frac{29}{8}$ y el resto es R(x) = $-\frac{13}{16}$.

5. Calcula el valor del parámetro k en el polinomio p(x) = 12 + x^3 – kx para que al dividirlo por (x – 2) de resto – 4.

Solución.

Si p(x)=12 + x^3 – kx es dividido por (x – 2) y da resto – 4, el teorema del resto nos indica que p(2) = – 4. En ese caso,

$$p(2) = 12 + (2)^3 - k(2) = 12 + 8 - 2k = 20 - 2k$$

tiene que ser – 4. Por lo tanto,

$$20 - 2k = -4$$

De donde 20 + 4 = 2k, es decir, 24 = 2k y concluimos que k = 12.

6. Factoriza los siguientes polinomios sin utilizar la regla de Ruffini:

$$a)\quad x^6-25x^4 \qquad b)\quad x^4-6x^3+9x^2 \qquad c)\quad 9x^6+25x^2+30x^4 \qquad d)\quad x^5-x$$

Solución.

Aplicando la extracción de factor común y las identidades notables llegamos a que:

$a)\quad x^6-25x^4=x^4(x^2-25)=x^4(x+5)(x-5)$

$b)\quad x^4-6x^3+9x^2=x^2(x^2-6x+9)=x^2(x-3)^2$

$c)\quad 9x^6+25x^2+30x^4=x^2(9x^4+25+30x^2)=x^2(3x^2+5)^2$

$d)\quad x^5-x=x(x^4-1)=x(x^2-1)(x^2+1)=x(x+1)(x-1)(x^2+1)$

7. Descomponer factorialmente los siguientes polinomios:

$a)\quad f(x)=6-12x^2+7x-3x^3+2x^4 \qquad\qquad b)\quad h(x)=3+4x+16x^3-28x^2$

Solución.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6$

Por la regla de Ruffini:

	+2	-3	-12	+7	+6
+1		+2	-1	-13	-6
	+2	-1	-13	-6	0

Por lo que una raíz es $x_1 = +1$ y proseguimos resolviendo $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$ mediante la regla de Ruffini:

	+2	-1	-13	-6
+3		+6	+15	+6
	+2	+5	+2	0

Por lo que una raíz es $x_2 = +3$ y proseguimos resolviendo $2x^2 + 5x + 2 = 0$ mediante la fórmula general de segundo grado:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}=\begin{cases} x_3=-1/2 \\ x_4=-2\end{cases}$$

Por lo tanto, tiene otras dos raíces en $x_3 = -1/2$ y $x_4 = -2$.

La factorización de $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6$ es $f(x) = 2(x - 1)(x - 3)(x + 1/2)(x + 2)$.

b) $h(x) = 16x^3 - 28x^2 + 4x + 3$

Por la regla de Ruffini:

	+16	-28	+4	+3
1/2		+8	-10	-3
	+16	-20	-6	0

Por lo que una raíz es $x_1 = 1/2$ y proseguimos resolviendo $16x^2 - 20x - 6 = 0$. Para ello simplificamos, dividiendo toda la ecuación por 2:

$$8x^2 - 10x - 3 = 0$$

Y resolvemos mediante la fórmula general de segundo grado:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16} = \begin{cases} x_2 = 24/16 = +3/2 \\ x_3 = -4/16 = -1/4 \end{cases}$$

Por lo tanto, tiene otras dos raíces en $x_2 = 3/2$ y $x_3 = -1/4$.

La factorización de $h(x) = 16x^3 - 28x^2 + 4x + 3$ es $h(x) = 16(x - 1/2)(x - 3/2)(x + 1/4)$.

8. Calcula el M.c.d y m.c.m. de los polinomios $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ y $R(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$.

Solución.

Factorizamos los polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Por la regla de Ruffini:

	+1	-3	0	+4
+2		+2	-2	-4
	+1	-1	-2	0

Por lo que una raíz es $x_1 = +2$ y proseguimos resolviendo $x^2 - x - 2 = 0$ por la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_2 = +2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, tiene otras dos raíces en $x_2 = 2$ y en $x_3 = -1$.

La factorización de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ es $P(x) = (x + 1)(x - 2)^2$

b) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Por la regla de Ruffini:

	+1	-2	-1	+2
+1		+1	-1	-2
	+1	-1	-2	0

Por lo que una raíz es $x_1 = 1$ y proseguimos resolviendo $x^2 - x - 2 = 0$ con la fórmula general de segundo grado:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_2 = +2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, tiene otras dos raíces en $x_2 = +2$ y $x_3 = -1$.

La factorización de $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ es $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

c) $R(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

Sacando factor común:

$$R(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 3x + 2).$$

Por lo que una raíz es $x_1 = 0$ de multiplicidad 2. Proseguimos resolviendo $x^2 - 3x + 2 = 0$ con la fórmula general de segundo grado:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_2 = +2 \\ x_3 = +1 \end{cases}$$

Por lo tanto, tiene otras dos raíces en $x_2 = +2$ y $x_3 = +1$.

La factorización de $R(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ es $R(x) = x^2(x - 1)(x - 2)$.

- Calculamos ahora el M.c.d. mediante el producto de los "factores comunes al menor exponente".

$$\text{M.c.d.}(P(x), Q(x), R(x)) = (x - 2)$$

- Calculamos ahora el m.c.m. mediante el producto de los "factores comunes y no comunes al mayor exponente".

$$\text{m.c.m.}(P(x), Q(x), R(x)) = x^2(x - 1)(x + 1)(x - 2)^2 = x^2 (x^2 - 1)(x^2 - 4x + 4) =$$

$$= (x^4 - x^2)(x^2 - 4x + 4) = x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 4x^2$$

9. Simplifica al máximo: $a)\ \dfrac{x^4 + 4x^3 + 4x^2}{6x^4 + 4x^3 + 2x^5} =$ $\qquad b)\ \dfrac{2x^3 + 2x}{x + x^3 - 1 - x^2} =$

Solución

Factorizamos arriba y abajo intentando sacar factor común, utilizar productos notables y si no queda más remedio, aplicando Ruffini o la fórmula de la ecuación de segundo grado. Una vez hecho esto, eliminamos aquellos factores que tengan iguales en el numerador y denominador:

$$a)\quad \frac{x^4+4x^3+4x^2}{6x^4+4x^3+2x^5}=\frac{x^2(x^2+4x+4)}{2x^3(3x+2+x^2)}=\frac{(x+2)^2}{2x(x+1)(x+2)}=\frac{(x+2)}{2x(x+1)}=\frac{x+2}{2x^2+2x}$$

$$b)\quad \frac{2x^3+2x}{x+x^3-1-x^2}=\frac{2x(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{2x}{x-1}$$

10. Opera y simplifica al máximo:

$$a)\quad \frac{2z-2}{z^3-1}+\frac{z}{z^2+z+1}-\frac{3}{z-1}= \qquad b)\quad \frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-2x+x^2}=$$

$$c)\quad \frac{x^2-4}{x^2-3x}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}= \qquad d)\quad \frac{x^2}{4x^2-9}:\frac{x}{4x^2+9-12x}=$$

Solución:

En los dos primeros casos, factorizamos los denominadores y calculamos el m.c.m. de los mismos. Luego transformamos en fracciones equivalentes y sumamos o restamos. Para terminar, factorizamos de nuevo el numerador y simplificamos si existe algún factor igual al del denominador.

$$a)\quad \frac{2z+7}{z^3-1}+\frac{z}{z^2+z+1}-\frac{3}{z-1}=\frac{2z+7}{(z^2+z+1)(z-1)}+\frac{z}{z^2+z+1}-\frac{3}{z-1}=$$

$$=\frac{2z+7}{(z^2+z+1)(z-1)}+\frac{z(z-1)}{(z^2+z+1)(z-1)}-\frac{3(z^2+z+1)}{(z^2+z+1)(z-1)}=$$

$$=\frac{2z+7}{(z^2+z+1)(z-1)}+\frac{z^2-z}{(z^2+z+1)(z-1)}-\frac{3z^2+3z+3}{(z^2+z+1)(z-1)}=\frac{2z+7+z^2-z-3z^2-3z-3}{(z^2+z+1)(z-1)}=$$

$$=\frac{-2z^2-2z+4}{(z^2+z+1)(z-1)}=\frac{-2(z-1)(z+2)}{(z^2+z+1)(z-1)}=\frac{-2(z+2)}{(z^2+z+1)}=\frac{-2z-4}{z^2+z+1}$$

$$b)\quad \frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{1-2x+x^2}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}-\frac{(x+1)}{(x-1)^2(x+1)}=$$

$$=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{-2}{(x-1)^2(x+1)}$$

En los apartados c) y d) calculamos las factorizaciones de todos los polinomios presentes y multiplicamos o dividimos con los factores. Una vez multiplicados o divididos, eliminamos aquellos factores iguales que estén en el numerador y denominador:

$$c)\quad \frac{x^2-4}{x^2-3x}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}=\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)^2}{(x-2)(x-3)}=\frac{(x-2)(x+2)(x-3)^2}{x(x-3)^2(x-2)}=\frac{(x+2)}{x}$$

$$d)\quad \frac{x^2}{4x^2-9}:\frac{x}{4x^2+9-12x}=\frac{x^2}{(2x-3)(2x+3)}:\frac{x}{(2x-3)^2}=\frac{x^2(2x-3)^2}{x(2x-3)(2x+3)}=\frac{x(2x-3)}{(2x+3)}=\frac{2x^2-3x}{2x+3}$$